Nicolae Ivăşchescu

ALGEBRĂ

CULEGERE DE EXERCIŢII ŞI PROBLEME

Clasa a 7-a

- **TIPURI DE PROBLEME**
  - repere teoretice
  - probleme rezolvate
  - probleme propuse – rezolvări complete

- **PERFORMANȚĂ**
  - olimpiade și concursuri școlare

EDITURA CARMINIS
educațional

CUPRINS

Bibliografie

Matematică. Olimpiadele școlare cu rezolvări complete, toate județele, clasa a 7-a, Editura Carminis

Matematică. Olimpiadele școlare cu rezolvări complete, toate județele, clasa a 6-a, Editura Carminis

Colecția revistelor: • *Gazeta matematică;* • *Revista de matematică,* Timişoara; • *Recreații Matematice,* Iaşi; • *Revista de Matematică din Valea Jiului;* • *Revista „Sclipirea minții"*, Buzău; • *Revista de Matematică și Informatică,* Constanța, • *Revista „Sfera"*, Băileşti; • *Revista „Micii Matematicieni"*, Hârlău; • *Revista „Alpha"*, Craiova.

I. NUMERE REALE

A. Pătrate perfecte

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional. Algoritmul extragerii rădăcinii pătrate

Ştim că în mulțimea numerelor naturale se numeşte pătrat perfect un număr n care se poate scrie ca puterea a doua a unui număr natural a, adică $n=a^2$.

Câteva proprietăți ale pătratelor perfecte

P1. Două numere naturale sunt diferite dacă pătratele lor sunt numere diferite.

P2. Şirul $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2, ...$ se numeşte şirul pătratelor perfecte. Deoarece şirul numerelor naturale este infinit, şirul pătratelor perfecte este infinit.

P3. Între două pătrate perfecte consecutive nu se mai află un pătrat perfect.

P4. Singurele pătrate perfecte exprimate prin numere naturale consecutive sunt 0 şi 1.

P5. Între pătratele perfecte n^2 şi $(n+1)^2$ se găsesc 2n numere naturale care nu sunt pătrate perfecte.

P6. Orice pătrat perfect are un număr impar de divizori, deci niciun număr natural care are un număr par de divizori nu este pătrat perfect.

P7. Orice pătrat perfect are ca ultimă cifră una dintre cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9, deci pătratele perfecte nu se termină cu cifrele 2, 3, 7, 8.

Cum demonstrăm că un număr natural nu este pătrat perfect?

Exemplu. Arătați că numărul 3 nu este pătrat perfect.

Rezolvare

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că 3 este pătrat perfect. Înseamnă că există un număr rațional $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$, astfel încât $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 3 \Leftrightarrow p^2 = 3q^2$. (1)

Dar cum p şi q sunt prime între ele $\Rightarrow p^2 \vdots 3$, adică $p \vdots 3$, înseamnă că există un număr întreg m astfel încât $p = 3m$. Înlocuind în (1) $(3m)^2 = 3q^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 9m^2 = 3q^2 \,|:3 \Leftrightarrow 3m^2 = q^2$, dar şi $(m, q) = 1 \Rightarrow q \vdots 3$.

Am găsit că $p \vdots 3$ şi $q \vdots 3 \Rightarrow (p, q) = 3$, dar $(p, q) = 1 \Rightarrow$ contradicție.

Înseamnă că presupunerea făcută nu este adevărată, adică 3 nu este pătrat perfect.

❖ <u>Definiție</u>

- Un număr natural n cu proprietatea $n^2 = a$ se numește **rădăcina pătrată** a numărului a și se notează $n = \sqrt{a}$.

❖ <u>Definiție</u>

- Dacă n este rațional, numărul $|n|$ se numește **rădăcina pătrată** a numărului a, dacă $a = n^2$ și scriem $\sqrt{a} = |n|$.

◆ *<u>Exemple</u>*

a) Numărul natural 9 are proprietatea că $9^2 = 81$ și $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$.

b) Numărul $|-10|$ are proprietatea că $\sqrt{|-10|^2} = |-10| = 10$.

c) $\sqrt{\dfrac{49}{64}}=\sqrt{\left(\dfrac{7}{8}\right)^2}=\dfrac{7}{8}$, pentru că $\left(\dfrac{7}{8}\right)^2=\dfrac{49}{64}$.

d) $\sqrt{0,16}=\sqrt{(0,4)^2}=0,4$, pentru că $0,4^2=0,16$.

1. Calculul rădăcinii pătrate dintr-un număr natural pătrat perfect

Pentru a găsi rădăcina pătrată a unui număr pătrat perfect putem proceda astfel:

1. Descompunem numărul în factori primi și apoi scriem numărul ca putere cu exponentul 2.

◆ *Exemplu*

Calculați: a) $\sqrt{196}$; b) $\sqrt{225}$; c) $\sqrt{256}$.

Rezolvare

a) $\begin{array}{r|l} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7^2 \\ 1 & \end{array}$, deci $196=2^2\cdot 7^2=(2\cdot 7)^2$ și avem $\sqrt{196}=14$.

b) $\begin{array}{r|l} 225 & 5 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3^2 \\ 1 & \end{array}$, adică $225=3^2\cdot 5^2=(3\cdot 5)^2$ și avem $\sqrt{225}=15$.

c) $\begin{array}{r|l} 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2^6 \\ 1 & \end{array}$, adică $256=2^8=\left(2^4\right)^2$ și avem $\sqrt{256}=2^4=16$.

2. Folosim algoritmul extragerii rădăcinii pătrate.

◆ *Exemplu*

Calculați: a) $\sqrt{196}$; b) $\sqrt{961}$; c) $\sqrt{1296}$.

Rezolvare

Obligatoriu parcurgem următoarele etape:

1. Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, numărând de la dreapta la stânga, ultima grupă putând avea o singură cifră.

Avem: a) $\sqrt{\overset{\frown}{1}\overset{\frown}{96}}$.

2. Căutăm numărul al cărui pătrat este 1.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overset{\frown}{1}\overset{\frown}{96}} & 1 \\ \hline \underline{1} & \\ = & \end{array}$$

Numărul căutat este 1 și se așază în dreapta sus. Îl ridicăm pe 1 la pătrat și-l așezăm sub prima grupă din stânga și le scădem. Obținem restul 0, însemnat cu „=".

3.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overset{\frown}{1}\overset{\frown}{96}} & 1 \\ \hline \underline{1} & 2 \\ =96 & \end{array}$$

Lângă restul obținut coborâm următoarea grupă. Dublăm prima cifră a rădăcinii și rezultatul îl scriem sub 1.

4.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overset{\frown}{1}\overset{\frown}{96}} & 14 \\ \hline \underline{1} & 24 \cdot 4 = 96 \\ =96 & \\ \underline{96} & \\ = = & \end{array}$$

Împărțim prima cifră a restului, numit rest parțial, adică 9 împărțit cu 2 și obținem câtul 4 pe care îl așezăm lângă 2 și numărul obținut îl înmulțim cu 4 (adică $24 \cdot 4 = 96$).

Scădem din restul parțial 96 și obținem zero.

Numărul 4 găsit îl trecem sus lângă 1 și obținem 14, adică $\sqrt{196} = 14$.

Verificare: $14^2 = 196$

Spunem că rădăcina pătrată din 196 este 14.

b) $\sqrt{\overset{\frown}{9}\overset{\frown}{61}}$

Despărțim numărul în grupe de două cifre, de la dreapta la stânga.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overset{\frown}{9}\overset{\frown}{61}} & 3 \\ \hline \underline{9} & \\ = & \end{array}$$

Căutăm un cel mai mare număr natural al cărui pătrat să fie 9 sau mai mic decât el. Găsim $3^2 = 9$. Facem scăderea și obținem zero, însemnat cu „=".

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overset{\frown}{9}\overset{\frown}{61}} & 3 \\ \underline{9} & \overline{6} \\ =61 & \end{array}$$

Coborâm următoarea grupă.

Dublăm prima cifră a rădăcinii, adică pe 3 și îl scriem pe 6 sub 3.

Împărțim prima cifră a restului parțial la dublul primei cifre, adică $6:6=1$.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overset{\frown}{9}\overset{\frown}{61}} & 31 \\ \underline{9} & \overline{61 \cdot 1 = 61} \\ =61 & \\ \underline{61} & \\ == & \end{array}$$

Pe 1 îl scriem lângă 6 și obținem numărul 61 pe care îl înmulțim cu 1. Rezultatul 61 îl scădem din restul parțial și obținem restul zero.

Pe 1 îl scriem lângă 3 și am obținut că $\sqrt{961}=31$.

Verificare: $31^2=961$

c) $\sqrt{\overset{\frown}{12}\overset{\frown}{96}}$

Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overset{\frown}{12}\overset{\frown}{96}} & 3 \\ \underline{9} & \overline{} \\ 3 & \end{array}$$

Căutăm un cel mai mare număr natural al cărui pătrat să nu-l depășească pe 12. El este 3 pe care îl scriem în dreapta sus. Găsim $3^2=9$. Scădem 9 din 12 și obținem 3.

Lângă restul 3 coborâm următoarea grupă și obținem 396.

Dublăm prima cifră a rădăcinii, adică pe 3.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overset{\frown}{12}\overset{\frown}{96}} & 36 \\ \underline{9} & \overline{66 \cdot 6 = 396} \\ =396 & \\ \underline{396} & \\ === & \end{array}$$

Împărțim numărul format din primele două cifre ale restului parțial cu 6, adică $39:6$ și se obține câtul 6. Câtul 6 îl scriem lângă dublul lui 3, adică lângă 6 și obținem 66 care se înmulțește cu 6. Produsul se scade din restul parțial și obținem restul zero.

Lângă prima cifră a rădăcinii 3 îl scriem pe 6 și am găsit $\sqrt{1296}=36$.

Verificare: $36^2=1296$

■ **Observația 1.** Parcurgând corect etapele în procedeul de extragere a rădăcinii pătrate sigur ajungem la un număr al cărui pătrat este numărul de sub radical.

■ **Observația 2.** În cazul în care după prima etapă găsim mai multe grupe, lângă restul obținut cu a doua grupă din stânga, coborâm următoarea grupă și procedăm la fel. Iată un exemplu. Să calculăm $\sqrt{17073424}$.

$$\sqrt{\overset{\frown}{17}\overset{\frown}{07}\overset{\frown}{34}\overset{\frown}{24}}$$

Despărțim numărul în grupe de câte două cifre și obținem patru grupe.

Căutăm numărul natural al cărui pătrat este 17 sau mai mic decât 17. El este 4.

Ținând cont de modul de scriere din exemplele anterioare avem scrierea din stânga.

$\sqrt{\overset{\frown}{17}\overset{\frown}{07}\overset{\frown}{34}\overset{\frown}{24}}$	4132
16	$81 \cdot 1 = 81$
107	$823 \cdot 3 = 2469$
81	$8262 \cdot 2 = 16524$
2634	
2469	
=16524	
16524	
=====	

Coborâm următoarea grupă 07 lângă restul 1. Dublăm rădăcina găsită.

Lângă 8 punem câtul împărțirii lui 10 cu 8, adică 1.

Calculăm $81 \cdot 1 = 81$ pe care îl scădem din restul parțial 107.

Pe 1 îl scriem lângă 4 și obținem 41, adică primele două cifre ale rădăcinii.

Continuăm, lângă restul parțial coborând următoarea grupă, adică pe 34. Dublăm numărul format din primele două cifre, adică pe 41. Împărțim pe 26 la 8 și obținem câtul 3. Pe 823 îl înmulțim cu 3 și produsul îl scădem din restul parțial. Pe 3 îl scriem sus la rădăcină fiind a treia cifră a rădăcinii.

Coborâm ultima grupă lângă restul parțial şi dublăm pe 413. Deoarece $16:8=2$, lângă 826 îl punem pe 2 și înmulțim 8262 cu 2 și trebuie să se încheie algoritmul.

Am obținut $\sqrt{17073424}=4132$.

Verificare: $4132^2=17073424$

2. Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional scris sub formă de fracție zecimală

Pentru a extrage rădăcina pătrată dintr-un număr rațional scris sub formă de fracție zecimală parcurgem aceleași etape ca la extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr natural pătrat perfect. Dar, avem o singură modificare, în etapa I se desparte numărul în grupe de câte două cifre de la virgulă spre stânga și spre dreapta. Dacă în partea dreaptă o grupă (ultima din dreapta) are o singură cifră, o completăm cu o cifră de zero.

◆ *Exemplu:*

Să se efectueze următoarele extrageri: a) $\sqrt{1253,16}$; b) $\sqrt{7,5625}$.

Rezolvare

a) $\sqrt{\overset{\frown}{12}\overset{\frown}{53},\overset{\frown}{16}}$

Despărțim numărul în grupe de câte două cifre de la virgulă spre stânga și spre dreapta.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\overset{\frown}{12}\overset{\frown}{53},16} & 35,4 \\ \hline 9 & 65\cdot 5 \\ \hline 353 & 704\cdot 4 \\ 325 & \\ \hline 2816 & \\ 2816 & \\ \hline ==== & \end{array}$$

Acum parcurgem celelalte etape.

Căutăm prima cifră a rădăcinii.

Pătratul numărului 3 îndeplinește condiția să fie mai mic decât prima grupă 12.

Scădem din 12 pătratul lui 3 și obținem restul 3 lângă care coborâm grupa următoare.

Dublăm prima cifră a rădăcinii. Câtul împărțirii lui 35 cu 6 este 5. Îl punem pe 5 lângă 6 și înmulțim pe 65 cu 5.

Pe 5 îl trecem sus lângă 3 și punem apoi virgula, pentru că am terminat cu grupele din partea întreagă.

Îl dublăm pe 35. Lângă 35 o să scriem câtul împărțirii lui 28 cu 7, adică 4 și continuând obținem că $\sqrt{1253,16}=35,4$.

Verificarea: $35,4^2=1253,16$

b)

$\sqrt{7,5625}$	$2,75$
4	$\cancel{48 \cdot 8 = 384}$
356	$47 \cdot 7 = 329$
329	$545 \cdot 5 = 2725$
$=2725$	
2725	
$====$	

Parcurgem etapele de mai sus.

Prima cifră este 2. După 2, prima cifră, punem virgula.

Coborâm următoarea grupă. $35:4$ ne dă câtul 8.

Dar continuând constatăm că $48 \cdot 8 = 384 > 356$ și de aceea câtul îl micșorăm cu o unitate, adică va fi 7. Tăiem cu o linie oblică rândul care nu ne-a convenit și avem $47 \cdot 7 = 329$. Când dublăm nu ținem cont de virgulă, deci $27 \cdot 2 = 54$. $27:5$ dă câtul 5 și găsim că $\sqrt{7,5625} = 2,75$.

Observație. În cazul în care numărul rațional este reprezentat sub formă de fracție ordinară putem extrage rădăcina pătrată numai dacă termenii fracției (după o eventuală simplificare) sunt pătrate perfecte.

◆ *Exemplu:* a) $\sqrt{\frac{169}{196}} = \sqrt{\frac{13^2}{14^2}} = \sqrt{\left(\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{13}{14}$;

b) La $\sqrt{\frac{1875}{147}}$ constatăm că fracția de sub radical nu mai poate fi scrisă direct cu pătrate, 147 fiind terminat în 7 nu este pătrat perfect. Deoarece $1+8+7+5=21 \vdots 3$ și $1+4+7=12 \vdots 3$, fracția se simplifică cu 3 și avem $\sqrt{\frac{1875}{147}} = \sqrt{\frac{625}{49}} = \sqrt{\frac{25^2}{7^2}} = \frac{25}{7}$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Completați tabelul.

x	$\frac{1}{2}$	$0,7$	$\frac{3}{7}$	$1,3$	$2\frac{3}{4}$	$2,(3)$	$1,2(3)$	$3,5$	2^3	5^2
x^2										

Rezolvare

x	$\frac{1}{2}$	0,7	$\frac{3}{7}$	1,3	$2\frac{3}{4}$	2,(3)	1,2(3)	3,5	2^3	5^2
x^2	$\frac{1}{4}$	0,49	$\frac{9}{49}$	1,69	$\frac{121}{16}$	$\frac{49}{9}$	$\frac{1369}{900}$	12,25	2^6	5^4

2. Descompuneți următoarele numere în factori primi și recunoașteți care sunt pătrate perfecte:

a) 72; b) 144; c) 1250; d) $13^3 \cdot 13$; e) 2^{120}; f) $75 \cdot 27$; g) 10^{12}; h) 100^5.

Rezolvare

a) $72 = 2^3 \cdot 3^2$ nu este pătrat perfect.

b) $144 = 2^4 \cdot 3^2 = \left(2^2 \cdot 3\right)^2$ este pătrat perfect.

c) $1250 = 2 \cdot 5^4$ nu este pătrat perfect.

d) $13^4 = \left(13^2\right)^2$ este pătrat perfect.

e) $2^{120} = 2^{2 \cdot 60} = \left(2^{60}\right)^2$ este pătrat perfect.

f) $75 \cdot 27 = 3 \cdot 5^2 \cdot 3^3 = 3^4 \cdot 5^2 = \left(3^2 \cdot 5\right)^2$ este pătrat perfect.

g) $10^{12} = \left(10^6\right)^2$ este pătrat perfect.

h) $100^5 = \left(2^2 \cdot 5^2\right)^5 = \left[(2 \cdot 5)^2\right]^5 = \left[(2 \cdot 5)^5\right]^2$ este pătrat perfect.

3. Găsiți care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte:

a) 625, 312, 1024, 1007, 9801, 1443, 1444, 732, 784;

b) 12^6, 4^{12}, $3^{3 \cdot 4}$, $\left(5^4\right)^3$, $7^{\frac{1}{2} \cdot 8}$, 16^3, 27^3;

c) 13^{14n}, 5^{8n+4}, 4^{13n+1}, 7^{14n+2}, 9^{3n+1}, 23^{24n+6}, $17^{n(n+1)}$, 29^{n+n^2}.

Rezolvare

a) $625 = 25^2$ este pătrat perfect.

$312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$ nu este pătrat perfect.

$1024 = 2^{10} = \left(2^5\right)^2$ este pătrat perfect.

1007 nu este pătrat perfect (niciun pătrat perfect nu se termină în 7).

$9801 = 3^4 \cdot 11^2 = (3^2 \cdot 11)^2$ este pătrat perfect.

$37^2 = 1369 < 1443 < 1444 = 38^2$ este cuprins între două pătrate de numere naturale consecutive, deci nu este pătrat perfect.

$1444 = 38^2$ este pătrat perfect.

$732 = 2^2 \cdot 3 \cdot 61$ nu este pătrat perfect.

$784 = 2^4 \cdot 7^2 = (2^2 \cdot 7)^2 = 28^2$ este pătrat perfect.

b) $12^6 = (12^3)^2$ este pătrat perfect.

$4^{12} = 4^{6\cdot 2} = (4^6)^2$ este pătrat perfect.

$3^{3\cdot 4} = 3^{12} = (3^6)^2$ este pătrat perfect.

$(5^4)^3 = 5^{12} = (5^6)^2$ este pătrat perfect.

$7^{\frac{1}{2}\cdot 8} = 7^4 = (7^2)^2$ este pătrat perfect.

$16^3 = (2^4)^3 = 2^{12} = 2^{6\cdot 2} = (2^6)^2$ este pătrat perfect.

$27^3 = (3^3)^3 = 3^9$ nu este pătrat perfect.

c) $13^{14n} = 13^{7n\cdot 2} = (13^{7n})^2$ este pătrat perfect.

$5^{8n+4} = 5^{2(4n+2)} = [5^{4n+2}]^2$ este pătrat perfect.

$4^{13n+1} = (2^2)^{13n+1} = (2^{13n+1})^2$ este pătrat perfect.

$17^{14n+2} = 17^{2(7n+1)} = (17^{7n+1})^2$ este pătrat perfect.

$9^{3n+1} = (3^2)^{3n+1} = (3^{3n+1})^2$ este pătrat perfect.

$23^{24n+6} = 23^{2(12n+3)} = (23^{12n+3})^2$ este pătrat perfect.

$17^{n(n+1)}$, $n(n+1)$ este produs de două numere naturale consecutive și deci este număr par, adică $n(n+1) = 2k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 17^{n(n+1)} = 17^{2k} = (17^k)^2$ este pătrat perfect.

$29^{n+n^2} = 29^{n(n+1)}$ este pătrat perfect pentru că $n(n+1)$ este par.

4. Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte:

a) $a=(1+2+3+...+1000)\cdot 2+1001$;

b) $b=(2019+2018+2017+...+3+2+1)\cdot 2+2020$;

c) $c=1+3+5+...+2019$;

d) $d=(1+2+3+...+n)\cdot 2+n+1,\ n\in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare

a) $a=\dfrac{1000\cdot 1001}{2}\cdot 2+1001=1000\cdot 1001+1001=1001(1000+1)=$
$=1001^2$, deci este pătrat perfect.

b) $b=(1+2+3+...+2019)\cdot 2+2020=\dfrac{2019\cdot 2020}{2}\cdot 2+2020=$
$=2019\cdot 2020+2020=2020(2019+1)=2020^2$ este pătrat perfect.

c) $c=1+3+5+...+2019=\left(\dfrac{2019+1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{2020}{2}\right)^2=1010^2$. Se știe că
$1+3+5+...+(2n+1)=\left(\dfrac{2n+1+1}{2}\right)^2=(n+1)^2$.

d) $d=(1+2+3+...+n)\cdot 2+n+1=\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot 2+n+1=n(n+1)+$
$+(n+1)=(n+1)(n+1)=(n+1)^2$.

5. Calculați rădăcina pătrată descompunând numerele în factori primi:

a) $\sqrt{900}$; b) $\sqrt{1024}$; c) $\sqrt{1600}$; d) $\sqrt{2025}$;

e) $\sqrt{7056}$; f) $\sqrt{7744}$; g) $\sqrt{9604}$; h) $\sqrt{2304}$.

Rezolvare

a) $900=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2 \Rightarrow \sqrt{900}=\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}=2\cdot 3\cdot 5=30$;

b) $1024=2^{10}=\left(2^5\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1024}=\sqrt{\left(2^5\right)^2}=2^5=32$;

c) $1600=\left(2^3\cdot 5\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1600}=\sqrt{\left(2^3\cdot 5\right)^2}=2^3\cdot 5=40$;

d) $2025=3^4\cdot 5^2 \Rightarrow \sqrt{2025}=\sqrt{\left(3^2\cdot 5\right)^2}=45$;